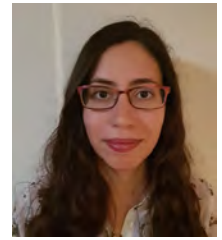


- MARÍA TERESA GARCÍA GÁLVEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Porti Piqué i titulada *Compactifications of actions on products of CAT(-1) spaces*, el dia 18 de setembre del 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



L'acció d'un grup discret d'isometries Γ a la frontera visual d'un espai CAT(-1) i propi X té una descomposició dinàmica $\partial_\infty X = \Omega_\Gamma \cup \Lambda_\Gamma$, on Ω_Γ és l'obert més gran de la frontera on Γ actua de manera pròpiament discontinua i Λ_Γ és el conjunt límit de l'acció. A més, si Γ és quasi-convex, aleshores l'acció a $X \cup \Omega_\Gamma$ també és pròpiament discontinua i cocompacta, i, per tant, Ω_Γ compactifica l'acció de Γ a X [1, 4].

Per espais CAT(0) la frontera visual no té una descomposició dinàmica en general. Aquest és el cas, per exemple, del producte de dos espais CAT(-1), que no és un espai CAT(-1) sinó un espai CAT(0). En aquest cas, la frontera visual del producte és la compactificació per horofuncions respecte a la mètrica producte. No obstant això, en un producte hi ha altres mètriques topològicament comparables, per exemple, les mètriques ℓ^p . En aquesta tesi estudiem accions a la compactificació per horofuncions del producte de dos espais CAT(-1) respecte a la mètrica del màxim o ℓ^∞ .

En el cas d'accions diagonals, la compactificació del màxim és molt útil. El teorema principal d'aquesta tesi és que per a X un espai propi CAT(-1) existeix un obert Ω_Γ^{\max} de la frontera ideal de la compactificació del màxim tal que l'acció diagonal de Γ , un grup infinit quasi-convex d'isometries d' X , a $X \times X \cup \Omega_\Gamma^{\max}$ és pròpiament discontinua i cocompacta. A més, Ω_Γ^{\max} és l'obert més gran de la frontera on l'acció és pròpiament discontinua. Quan Γ és un grup cocompacte de les isometries de X , Ω_Γ^{\max} és el conjunt de les geodèsiques parametritzades de X [2].

En aquesta tesi estudiem també en quins altres casos la compactificació del màxim pot ser útil. Per a Γ un grup hiperbòlic infinit, considerem ρ_1 i ρ_2 , dues representacions quasi-convexes en els grups d'isometries de dos espais

CAT(-1) propis X_1 i X_2 , i l'acció producte a $X_1 \times X_2$. Mostrem que el conjunt límit gran d'aquesta acció és regular si i només si les dues representacions són *coarseequivalent*. Si les dues representacions a més són cocompactes, aleshores X_1 i X_2 són espais *almostisometrics*. L'existència d'una *almostisometria* entre els espais ens permet mostrar que en aquest cas també hi ha un subconjunt Ω_Γ^{\max} de la frontera ideal que compactifica l'acció [3].

Encara que en aquest treball hem estudiat principalment la compactificació respecte a la mètrica del màxim, també explorem què passa amb la mètrica ℓ^1 . Per a aquesta mètrica també és possible trobar dominis de discontinuïtat i cocompactat per a l'acció producte. Compararem les compactificacions obtingudes amb la mètrica del màxim i la ℓ^1 per a alguns exemples, i mostrem que les compactificacions obtingudes respecte a les diferents mètriques en aquests casos concrets no són equivalents entre elles.

Referències

- [1] M. Coornaert. «Sur le domaine de discontinuité pour les groupes d'isométries d'un espace métrique hyperbolique». *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*. 59 (1989), núm. 2, 185–195.
- [2] T. García. «Compactification of a diagonal action on the product of CAT(-1) spaces». *Rep. SCM* 3 (2017), núm. 1, 27–38.
- [3] T. García and J. Porti. «Actions on products of CAT(-1) spaces». (Preprint, [arXiv:1809.08189](https://arxiv.org/abs/1809.08189)).
- [4] E. L. Swenson. «Quasi-convex groups of isometries of negatively curved spaces». *Topology Appl.* 110 (2001), núm. 1, 119–129.

- RICARD RIBA va llegir la seva tesi, dirigida per Wolfgang Pitsch i titulada *Trivial 2-cocycles for invariants of mod p homology spheres and Perron's conjecture*, el dia 27 de setembre del 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En la topologia de baixa dimensió, quan un vol representar una 3-varietat utilitzant les tècniques de tallar i enganxar, un pot considerar peces complicades i aplicacions d'enganxament simples o peces simples i aplicacions d'enganxament complicades. En aquesta última opció, un troba els anomenats *Heegaard splittings*, on les peces són dos cossos amb g nanses i les aplicacions d'enganxament són elements del *mapping class group* d'una superfície orientable de gènere g . De fet, per un teorema clàssic de J. Singer, és ben sabut que tota 3-varietat es pot representar d'aquesta manera.

Aquesta caracterització crea un pont entre la topologia i l'àlgebra que ens permet traduir els problemes topològics de 3-varietats en problemes algebraics sobre el *mapping class group*.

A través d'aquesta caracterització, en primer lloc s'ha estudiat la relació que hi ha entre les esferes d'homologia racional, mòdul p i el grup de Torelli mod p , el qual està format pels elements del *mapping class group* que actuen trivialment el primer grup d'homologia de la superfície de gènere g . Més precisament, en primera instància s'ha obtingut un criteri per determinar quan una esfera d'homologia racional es pot representar com un *Heegaard splitting* amb aplicació d'enganxament un element del grup de Torelli mod p per a un p fixat. Aquest

criteri ens ha permès demostrar que tota esfera d'homologia racional pot ser representada com un *Heegaard splitting* amb aplicació d'enganxament un element del grup de Torelli mod p per a cert p . Però que pel contrari, fixat un primer p , no tota esfera d'homologia mòdul p pot ser representada com un *Heegaard splitting* amb aplicació d'enganxament un element del grup de Torelli mod p .

Un cop estudiada la relació entre les esferes d'homologia racional i el grup de Torelli mod p , en aquesta tesi s'ha generalitzat l'eina donada en [1] per construir invariants d'esferes d'homologia entera a partir de 2-cocicles trivials sobre el grup de Torelli, a invariants d'esferes d'homologia racional i el grup de Torelli mod p .

Finalment, s'ha utilitzat aquesta construcció per donar una obstrucció a la conjectura de Perron, la qual afirma que certa funció sobre el grup de Torelli mod p amb valors en Z/p és un invariant d'esferes d'homologia mòdul p , i d'aquí s'obté que tal obstrucció ve donada pel fet que la primera classe característica dels fibrats de superfícies reduïda mòdul p no és nul·la.

Referències

- [1] W. Pitsch, «Trivial cocycles and invariants of homology 3-spheres». *Adv. Math.* 220 (2009), núm. 1, 278–302.

- NÚRIA FOLGUERA BLASCO va llegir la seva tesi, dirigida per Tomás Alarcón Cor i Javier A. Menéndez Menéndez i titulada *Stochastic modelling of epigenetic regulation: analysis of its heterogeneity and its implications in cell plasticity*, el dia 2 de novembre del 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En aquesta tesi doctoral, el nostre objectiu principal és entendre la importància de la regulació epigenètica en la determinació del destí cel·lular i de les seves possibles transicions cap a altres estats (altres fenotips). Per tal d'estudiar-ho, en primer lloc, fem un mo-

del estocàstic de regulació epigenètica. Aquest model, gràcies a la presència de mecanismes d'autoregulació positius, com d'inhibició mútua, presenta biestabilitat, fet que implica que els sistemes de regulació epigenètica poden estar oberts o tancats, i permetre així l'expres-

sió o noexpressió, respectivament, del gen que regulen. Aquest model, doncs, permet centrar-nos en l'anàlisi de la reprogramació cel·lular, és a dir, la situació on el sistema es mou de l'epifenotip diferenciat, caracteritzat per tenir el sistema de regulació epigenètica pel gen de diferenciació (pluripotència) obert(tancat), cap a l'epifenotip pluripotent, definit en aquest cas per tenir el sistema de regulació epigenètica pel gen de diferenciació (pluripotència) tancat (obert).

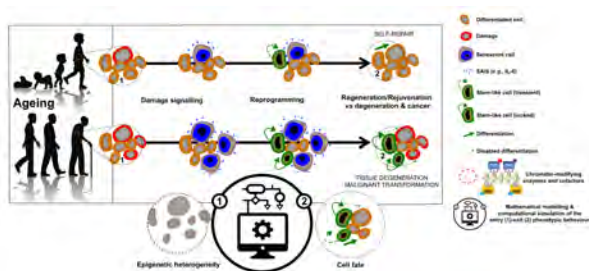


Figura 1: Efectes de l'envelliment en la plasticitat cel·lular. (Part superior) Situació d'envelliment saludable, on les cèl·lules es poden tornar a diferenciar i rejuvenir/reparar el teixit malmès. (Part inferior) Situació d'envelliment acompanyada de desregulació de l'activitat epigenètica, fet que implica que les cèl·lules no es puguin tornar a diferenciar i quedin atrapades en un epifenotip amb més risc de promoure comportament cancerigen.

En particular, dins de l'heterogeneïtat intrínseca dels sistemes de regulació epigenètica, nosaltres identifiquem l'existència de dos possibles escenaris: l'escenari resistent, on la reprogramació no pot tenir lloc, i l'escenari plàstic, que és el que permet el canvi de l'epifenotip diferenciat a l'epifenotip pluripotent. Aquest darrer escenari, relacionat amb l'existència de plasticitat epigenètica, ha estat associat amb situacions d'envelliment. De fet, quan al model de regulació epigenètica només s'hi consideren efectes d'envelliment, el sistema representa un estat plàstic saludable, on les propietats de cèl·lula mare són adquirides de manera temporal, ja que el sistema de regulació epigenètica pot retornar a l'epifenotip diferenciat (vegeu Figura 1, part superior). Aquesta situació és la que probablement és responsable de regenerar i rejuvenir els teixits i, per tant, és la situació desitjada, ja que permetria un envelliment *saludable*. No obstant això, quan als efectes de l'envelliment se li sumen alteracions de l'activitat epigenètica, que són freqüents a

mesura que s'envelleix, l'estat plàstic esdevé un estat plàstic patològic, on, en aquest cas, les propietats de cèl·lula mare són adquirides de manera irreversible, és a dir, són permanents (vegeu Figura 1, part inferior). Aquest escenari és el que probablement predisposa el sistema al càncer, ja que implica l'acumulació d'epifenotips indecisos que tenen el sistema de regulació epigenètica pel gen de pluripotència obert, és a dir, que aquest gen es pot expressar.

Per tal d'estudiar aquesta situació més en detall, formulem un context general per a l'estudi d'un model estocàstic d'escapes múltiples, que acobla el model de regulació epigenètica amb una xarxa de regulació genètica (vegeu Figura 2). En particular, nosaltres ens centrem en una xarxa de regulació genètica formada per dos gens, un gen que promou la diferenciació i un gen que promou la pluripotència; cada un d'aquests gens està sota els efectes de la regulació epigenètica. Quan analitzem aquest model conjunt, veiem que el paper que hi té la regulació epigenètica és cabdal, ja que el canvi d'epi-fenotip obert a tancat (o viceversa), permet a la xarxa de regulació genètica canviar d'estat, en altres paraules, permet un canvi del destí cel·lular del fenotip diferenciat al fenotip pluripotent (reprogramació) o del fenotip pluripotent al diferenciat (diferenciació).

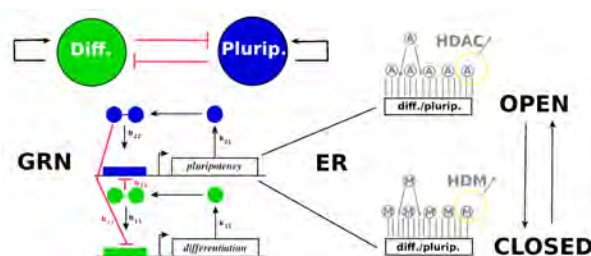


Figura 2: Representació del model d'escapes múltiples, on la xarxa de regulació genètica (GRN), formada per dos gens (diferenciat i pluripotent), està sota els efectes de la regulació epigenètica (ER). La regulació epigenètica determina si la regió promotora d'aquell gen està oberta o tancada i, per tant, si el gen es pot expressar o no.

Aquest model conjunt ens permet identificar els sistemes de regulació epigenètica responsables d'atrapar la cèl·lula en un estat pluripotent (similar a una cèl·lula mare), i impedir-ne així la diferenciació. La nostra formulació ens

permet dissenyar estratègies epigenètiques amb les quals podem aconseguir cèl·lules amb alta probabilitat de diferenciació, partint de cèl·lules que inicialment eren resistents a diferenciar-se (la seva probabilitat de diferenciació era molt baixa). Com hom pot imaginar, aquestes estratègies són molt rellevants per a l'estudi i el tractament del càncer i altres malalties associades amb l'envelliment, ja que, per una banda, ens permeten obtenir cèl·lules diferenciades que poden servir per regenerar certs teixits, i per l'altra, evitar que s'acumulin cèl·lules amb característiques relacionades amb el càncer.

- JOAN CLARAMUNT CARÓS va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Ara i titulada *Sylvester matrix rank functions on crossed products and the Atiyah problem*, el dia 5 de desembre del 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

La motivació principal de la tesi ha estat l'estudi del problema d'Atiyah, que es pregunta sobre la irracionalitat dels possibles valors que poden assolir els nombres de Betti l^2 . Aquests nombres van ser definits per M. Atiyah [3] el 1976, i generalitzen els nombres de Betti clàssics. Recentment diversos autors [4, 6] han trobat exemples de grups amb nombres de Betti l^2 irracionals. El grup *lamplighter* n'és un.

Tot i que la definició original d'Atiyah dels nombres de Betti l^2 és en termes de varietats Riemannianes on actua un grup G de manera cocompacta i lliure, els nombres de Betti l^2 també es poden definir purament en termes de G [8].

Donat un grup G numerable i discret, podem identificar l'àlgebra de grup $\mathbb{C}[G]$ com una subàlgebra de l'àlgebra d'operadors acotats $\mathcal{B}(l^2(G))$ mitjançant la representació regular per l'esquerra de G . L'àlgebra de Von Neumann associada a G , denotada per $\mathcal{N}(G)$, es defineix com l'àlgebra de Von Neumann generada per $\mathbb{C}[G]$ dins de $\mathcal{B}(l^2(G))$. Una propietat important d'aquesta àlgebra és que s'hi pot definir una *traça*, és a dir, un funcional lineal $\text{tr}: \mathcal{N}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ amb la propietat $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$, de la manera següent:

$$\text{tr}(a) = \langle a(\xi_e), \xi_e \rangle, \quad a \in \mathcal{N}(G)$$

Aquí ξ_e denota l'element de la base ortonormal de $l^2(G)$ associat al neutre $e \in G$, i $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Referències

- [1] N. Folguera-Blasco, E. Cuyàs, J.A. Menéndez, T. Alarcón, «Epigenetic regulation of cell fate reprogramming in aging and disease: A predictive computational model». *PLoS Comp. Biol.* **14**(3) (2018), e1006052.
- [2] N. Folguera-Blasco, R. Pérez-Carrasco, E. Cuyàs, J.A. Menéndez, T. Alarcón, «A multiscale model of epigenetic heterogeneity-driven cell fate decision-making». *PLoS Comp. Biol.* **15**(4) (2019), e1006592.



el producte escalar de $l^2(G)$. A través de la traça es defineixen els nombres de Betti l^2 : un nombre real r és un *nombre de Betti l^2* si existeix un element $T \in \mathbb{C}[G]$ tal que $\text{tr}(p_T) = r$, on $p_T: l^2(G) \rightarrow l^2(G)$ denota la projecció ortogonal a $\ker(T)$.

Aquesta tesi s'estructura en quatre projectes.

- **Àlgebres de grup sorgint d'àlgebres de producte creuat.** Una de les observacions importants del treball és poder realitzar l'àlgebra del grup *lamplighter* (i àlgebres de grup més generals) en termes d'una àlgebra producte creuat de la forma $\mathcal{A} = C_{\mathbb{C}}(X) \rtimes_T \mathbb{Z}$, és a dir, a través de funcions localment constants sobre el conjunt de Cantor X , on actua un homeomorfisme $T: X \rightarrow X$. Aquest nou enfocament permet traslladar la funció traça anterior a una *funció de rang* en \mathcal{A} [1].
- **Funcions de rang sobre àlgebres de producte creuat.** A partir de la identificació anterior, s'estudien les possibles funcions de rang que l'àlgebra \mathcal{A} pot admetre. Per a fer-ho es demostra, usant idees de [9], que es pot identificar \mathcal{A} com a una subàlgebra de \mathcal{M} , el conegut *factor continu de Von Neumann* i definit com la completació (en rang) de l'àlgebra ultramatricial $\varinjlim_n M_{2^n}(\mathbb{C})$. Això permet construir, donada una mesura T -invariant i ergòdica sobre el Cantor, una

funció de rang en \mathcal{A} que és a més única complint una certa propietat de compatibilitat. A partir de tota aquesta construcció, i seguint idees de [6], s'ha trobat tota una família de nombres de Betti l^2 irracionals provinents de l'àlgebra del grup *lamplighter*.

- **Complecions d'àlgebres ultramatricials.** Donat que la completió en rang de l'àlgebra ultramatricial $\varinjlim_n M_{2^n}(\mathbb{C})$ ha tingut un paper fonamental en la construcció anterior, s'han estudiat també completions en rang d'àlgebres ultramatricials generals. S'ha donat una caracterització [2] de quan la completió en rang d'una àlgebra ultramatricial dona lloc al factor continu de Von Neumann \mathcal{M} . Això estableix una analogia interessant amb l'estructura del factor II_1 hiperfinit en la teoria de les àlgebres de Von Neumann. S'han obtingut també resultats anàlegs en el cas de D -anells, i anells amb involució.
- **Un punt de vista analític.** També es presenta un possible enfocament analític per atacar el problema d'Atiyah, a través de l'estudi dels que s'anomenen estats KMS sobre l'àlgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\mathcal{G}, E)$ d'un grup(oide) \mathcal{G} actuant sobre un graf E [5]. Seguint [7], es trasllada el problema d'existència (i unicitat) d'estats KMS sobre l'àlgebra $\mathcal{T}(\mathcal{G}, E)$ en un problema de punt fix sobre l'espai de traces de la C^* -àlgebra de grup(oide). Es mostra que, en el cas de l'àlgebra del grup *lamplighter*, aquest punt fix és exactament la traça anterior tr.

Referències

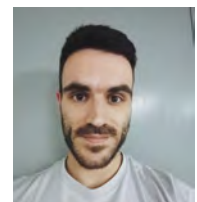
[1] P. Ara, J. Claramunt, «Sylvester matrix rank functions on crossed products». *ar-*

- MARC JORBA CUSCÓ va llegir la seva tesi, dirigida per Ariadna Farrés i Àngel Jorba i titulada *Periodic time dependent Hamiltonian systems and applications*, el dia 1 de març del 2019. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Les equacions diferencials hamiltonianes indueixen sistemes dinàmics governats per una llei de conservació. Aquesta tesi versa sobre sistemes hamiltonians no autònoms que depenen periòdicament del temps. Hom pot, en

Xiv:1902.06476 [math.RA], accepted for publication in *Ergod. Theory Dyn. Syst.*

- [2] P. Ara, J. Claramunt, «Uniqueness of the von Neumann continuous factor». *Canad. J. Math.* 70 (2018), 961–982.
- [3] M.F. Atiyah, «Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras», in *Colloque «Analyse et Topologie» en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*. *Soc. Math. France* 32–33 (1976), 43–72.
- [4] T. Austin, «Rational group ring elements with kernels having irrational dimension». *Proc. London Math. Soc.* 107 (2013), 1424–1448.
- [5] J. Claramunt, A. Sims, «Preferred traces on C^* -algebras of self-similar groupoids arising as fixed points». *J. Math. Anal. Appl.* 466 (2018), 806–818.
- [6] L. Grabowski, «Irrational l^2 -invariants arising from the lamplighter group». *Groups Geom. Dyn.* 10 (2016), 795–817.
- [7] M. Laca, I. Raeburn, J. Ramagge, M.F. Whittaker, «Equilibrium states on operator algebras associated to self-similar actions of groupoids on graphs». *Adv. Math.* 331 (2018), 268–325.
- [8] W. Lück, « L^2 -Invariants: Theory and Applications to Geometry and K -Theory». *A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Volume 44. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [9] I.F. Putnam, «The C^* -algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set». *Pacific J. Math.* 136 (1989), 329–353.



tal cas, pensar la variable temporal com un angle.

En el món de les aplicacions, és comú que els sistemes hamiltonians que depenen periòdicament del temps siguin, de fet, per-

torbacions periòdiques de sistemes autònoms. En tal cas, l'espai de fase del sistema pertorbat hereta l'estructura del no pertorbat: genèricament, les estructures quasi-periòdiques del sistema autònom adquireixen la freqüència de la pertorbació.

Les estructures invariants d'un sistema dinàmic organitzen el comportament límit de les solucions del sistema, és a dir, aquestes estructures són l'esquelet de la dinàmica. Els objectes invariants, així com el seu comportament normal, s'han d'analitzar amb cura si es vol tenir una comprensió profunda de la dinàmica.

La dissertació està estructurada en dues parts. En la primera s'estudien, en abstracte, diferents varietats invariants que apareixen en sistemes hamiltonians que depenen periòdicament del temps. Aquesta primera part està centrada, majoritàriament, en els algorismes i implementacions de mètodes numèrics per calcular tals objectes. Tanmateix, hi ha un capítol dedicat a l'estudi teòric de sistemes forçats quasi-periòdicament. Més específicament, aquesta primera part consta dels continguts següents:

- El mètode no autònom de les transformades de Lie.
- El mètode de la parametrització en aplicacions estroboscòpiques.
- Càlcul de corbes invariants en aplicacions estroboscòpiques.
- Sistemes quasi-periòdics al pla complex.

En la segona part de la dissertació, s'estudien diversos problemes físics que es poden modelar emprant sistemes hamiltonians que depenen periòdicament del temps. Aquests són:

- ALBERTO PÉREZ CERVERA va llegir la seva tesi, dirigida per Tere M. Seara i Gemma Huguet i titulada *On the role of oscillatory dynamics in neural communication*, el dia 4 d'abril del 2019. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquesta tesi estudia problemes relacionats amb les oscil·lacions de l'activitat cerebral. Explorem com dues poblacions neuronals en activitat oscil·latòria es comuniquen més efectivament quan estan lligades en fase, tal com suggereix la teoria de *comunicació a través de la coherència* (CTC) [1].

Al primer capítol, introduïm les equacions de Wilson-Cowan (WC) [2], un model de camp

- Models periòdics del sistema Terra-Lluna: s'exposen les propietats més importants de dos models alternatius al problema restringit dels tres cossos que tenen en compte la gravetat del Sol, el problema bicircular (PBC) i el problema quasi-bicircular (PQBC). El primer, el PBC, assumeix un moviment de Terra, Lluna i Sol que no verifica les lleis de Newton, és a dir, no és coherent. El segon, el PQBC, és una versió coherent del primer.
- Veles solars al sistema Terra-Lluna: s'estudia com l'espai de fase del sistema Terra-Lluna canvia quan una nau s'equipa amb una vela solar. En particular, la geometria de les famílies de punts fixos que reemplacen els punts d'equilibri Lagrangians en el sistema Terra-Lluna, el comportament lineal i les bifurcacions.
- Pressió de radiació solar i els núvols librationals del sistema Terra-Lluna: s'investiga l'efecte de petites dosis de pressió de radiació solar (PRS) en unes certes regions d'estabilitat conegudes. L'estudi es restringeix a valors petits de la PRS, ja que, fins i tot en magnituds petites, té un fort impacte en la dinàmica del sistema Terra-Lluna.
- La dinàmica de les recol·lisions de partícules: s'estudia com un electró pertorbat per un làser és recapturat pel nucli (recol·lisió) en dues dimensions. S'identifica un mecanisme de recol·lisió relacionat amb una varietat invariant de dimensió tres, que explica totes les trajectòries que recol·lisionen. Aquest nou escenari és consistent amb el cas unidimensional estudiat anteriorment.

mitjà que descriu l'activitat d'una xarxa de neurones excitatòries (E) i inhibidores (I) i calculem les bifurcacions que generen cicles límit.

Al capítol 2 estudiem com un cicle límit generat a través d'aquesta interacció E-I respon a un forçament periòdic. Considerem el model de WC en règim oscil·latori amb una pertorbació externa periòdica en el temps. Considerem el

mapa estroboscòpic d'aquest sistema i calculem el diagrama de bifurcació dels seus punts fixos i òrbites periòdiques en funció de l'amplitud i la freqüència de la pertorbació. El diagrama de bifurcació ens permet identificar les àrees amb lligadura de fase, així com diferents àrees on tenim coexistència de dos objectes invariants estables.

Al capítol 3 utilitzem tècniques recents basades en les variables fase-amplitud [3] per descriure la dinàmica de fase d'un oscil·lador sota diferents pertorbacions. En particular, utilitzem el mètode de la parametrització [4] per calcular un canvi de variables que descriu correctament la dinàmica prop del cicle límit en termes de la fase (variable periòdica) i l'amplitud. Aquests càlculs estan basats en la forma normal de Floquet, que en redueix el cost computacional. Aquest canvi de variables ens permet calcular dues varietats importants en neurociència: els conjunts de fase/amplitud constant (les isòcrones/isostables). A més a més, calculem les funcions que descriuen els canvis de fase i amplitud causats per una pertorbació que arriba a diferents fases del cicle, les Corbes de Resposta de Fase i Amplitud, (PRCs i ARCs), respectivament. El canvi de variables calculat proporciona també l'extensió d'aquestes corbes fora del cicle límit, definides com les funcions de resposta de fase i amplitud, (PRFs i ARFs). Calculem tots aquests objectes per a cicles límit en dues i tres dimensions.

Al capítol 4 ens centrem en les aplicacions del mètode de la parametrització per calcular PRCs per a estímuls de duració i amplitud arbitrària. La idea bàsica del mètode és construir una pertorbació periòdica particular que consisteix en la repetició d'un estímul transitori seguit d'un període de relaxació en el qual no actua cap pertorbació. Per a aquest sistema periòdic considerem el seu corresponent mapa estroboscòpic i demostrem que sota certes condicions, té una corba invariant i donem la relació entre la PRC i la dinàmica interna d'aquesta corba. A més a més, relacionem les propietats d'existència d'aquesta corba quan l'amplitud de la pertorbació augmenta, amb els canvis a la PRC i a la geometria de les isòcrones. Finalment, presentem algorismes per obtenir numèricament la PRC i l'ARC.

Al capítol 5 estudiem la dinàmica emergent quan s'acoblen dos oscil·ladors idèntics prop d'una bifurcació de Hopf, pels quals suposem l'existència d'un paràmetre que desacobla el sistema quan s'anul·la. Utilitzant una forma normal derivada recentment per a dos sistemes idèntics prop d'una bifurcació de Hopf [5], fem una anàlisi teòrica i n'estudiem les bifurcacions. Identificant els coeficients de la forma normal per a un model de dos oscil·ladors de tipus WC acoblats, il·lustrem els resultats obtinguts en l'anàlisi teòrica en un model amb moltes aplicacions al camp de la percepció biestable. Un resultat important és la biestabilitat entre solucions en fase i en antifase. Utilitzant mètodes de continuació numèrica confirmem els resultats teòrics obtinguts per a valors petits de l'acoblament i explorem els límits de l'aproximació quan l'acoblament és gran. Finalment, discutim les implicacions de l'estudi dut a terme en models de percepció multiestable.

Referències

- [1] P. Fries, «A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence». *Trends in cognitive sciences* 9 (2005), núm. 10, 474–480.
- [2] H.R. Wilson, J.D. Cowan, «Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons». *Biophysical journal*, 12 (1972), núm. 1, 1–24
- [3] A. Guillemon, G. Huguet, «A computational and geometric approach to phase resetting curves and surfaces». *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8 (2009), núm. 3, 1005–1042.
- [4] X. Cabré, E. Fontich, R. De La Llave, (2005). «The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications». *Journal of Differential Equations*, 218 (2005), núm. 2, 444–515.
- [5] P. Ashwin, A. Rodrigues, «Hopf normal form with SN symmetry and reduction to systems of nonlinearly coupled phase oscillators». *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 325 (2016), 14–24.